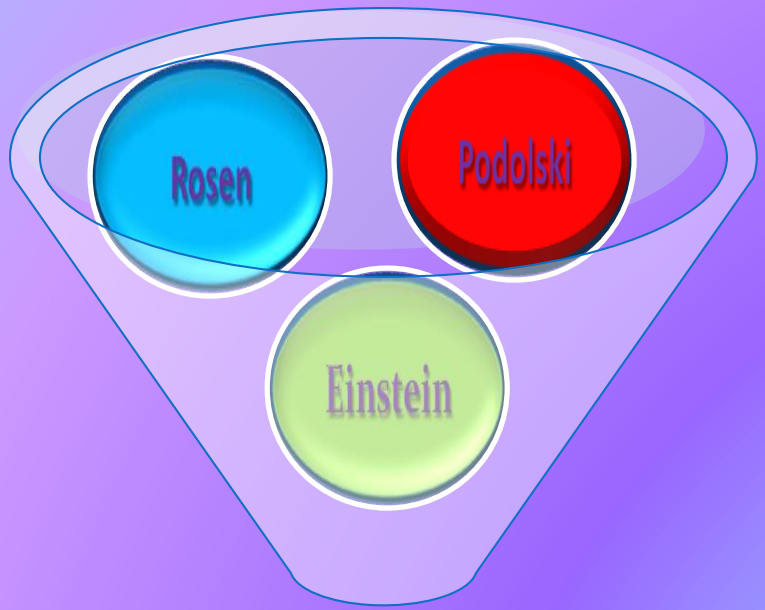
شاهد درهم تنیدگی(Entanglement witness)

دی ۸۹

مقدمه:

در هم تنیدگی کوانتوم: مشخصه ویژه ای از مکانیک کوانتومی
که مجبور می کند چهارچوب فکری کلاسیکی را رها کنیم ...

شرودینگر



Entanglement

تاریخچه:

1	نابرابر های بل	Bell	1964
2	در هم تنیدگی برای Qubit ها	Wootter	1998
3	معیار کاهش	Horodecki,Cerf	1999
4	شاهد درهم تنیدگی	Horodecki, Terhal	1996-2000
5	معیار لازم و کافی	Zhang,Li	2000-2001
6	معیار majorization	Nielsen and Kempe	2001
7	نمونه های درجه پایین	Lewenstein,Cirac,...	2000-2001
8	بسط PPT	Horodecki, Terhal	2002

مقدمه:

$$\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B.$$

فضای هیلبرت
سیستم کوانتومی S

ضرب تنسور

$|\psi_S\rangle$

S

$|a\rangle \in \mathcal{H}_A$

$|b\rangle \in \mathcal{H}_B$

$$\sum_{kl} |c_{kl}|^2 = 1$$

$$|\psi_S\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} |a_k\rangle |b_l\rangle$$

$$|\psi_S\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle = \left(\sum_k \alpha_k |a_k\rangle\right) \otimes \left(\sum_l \beta_l |b_l\rangle\right) = \sum_{kl} \alpha_l \beta_l |a_k\rangle |b_l\rangle$$

$$\sum_k |\alpha_k|^2 = \sum_l |\beta_l|^2 = 1$$

$$|\psi_S\rangle = \sum_{k,l} c_{kl} |a_k\rangle |b_l\rangle$$

$$c_{kl} = \alpha_k \beta_l$$

عملگر چگالی:

$$|\psi_S\rangle = \sum_{k,l} c_{kl}|a_k\rangle|b_l\rangle$$

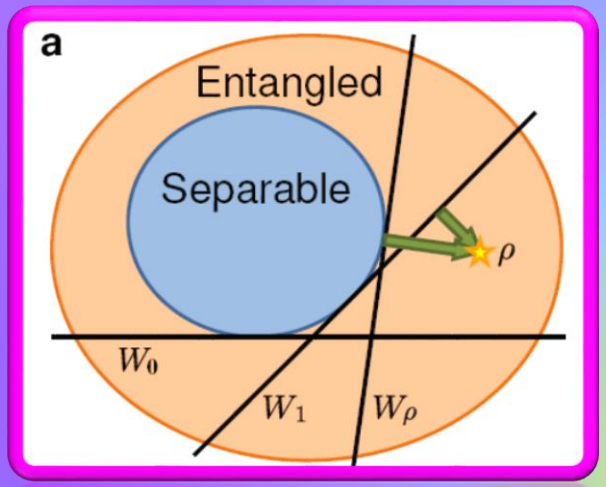
1. تفکیک پذیر
2. درهم تنیدگی

$$c_{kl} = \alpha_k \beta_l$$

$$c_{kl} \neq \alpha_k \beta_l$$

همبستگی حالت ها

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$



در هم تنیدگی در حالت کلی:

محاسبه در هم تنیدگی:

$$\rho_{123\ldots N} = \sum_{\ell} C_{\ell} \rho_1^{\ell} \otimes \rho_2^{\ell} \otimes \rho_3^{\ell} \otimes \ldots \otimes \rho_N^{\ell},$$

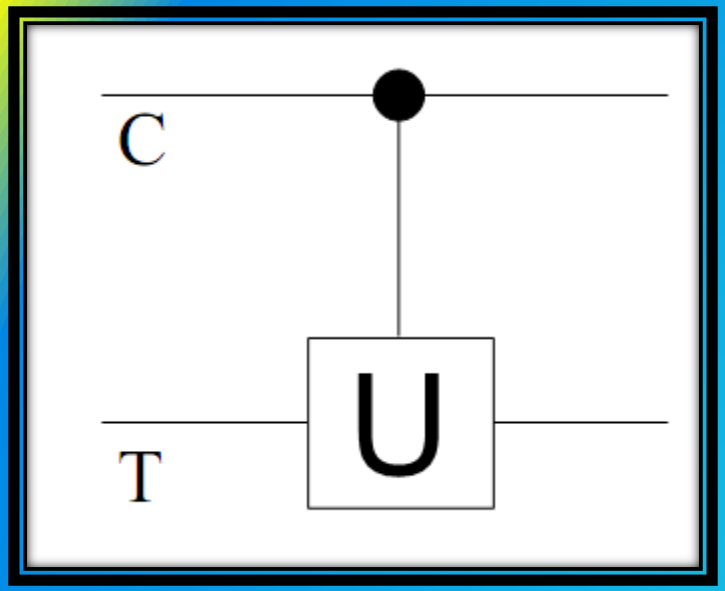
محاسبات تجربی

1. نگاشت جزئی مثبت (PPT)
   - روش های قوی تری هستند
   - سادگی و راحتی محاسبات
   - عدم آشکارسازی بسیاری از نمونه های آزمایشگاهی
2. شاهد در هم تنیدگی
   - بسیار مناسب برای آشکارسازی نمونه های درهم تنیدگی
   - پیچیدگی بیشتر

شرایط شاهد در هم تنیدگی:

1. $W^\dagger = W$ — هرمیتین
2. $\mathrm{Tr}(W|a,b\rangle\langle a,b|) \geq 0$ — for all states $|a,b\rangle$ in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$
3. W یک عملگر مثبت نیست و حداقل یک مقدار ویژه منفی دارد.
4. $\mathrm{Tr}(W)=1$ — $W = |\phi^-\rangle\langle\phi^-|^{T_B}$

کاربرد شاهد در هم تنیدگی در گیت NOT:



گیت NOT کنترل شده

Truth table

C	T		C	T
0	0	→	0	0
0	1	→	0	1
1	0	→	1	U(0)
1	1	→	1	U(1)

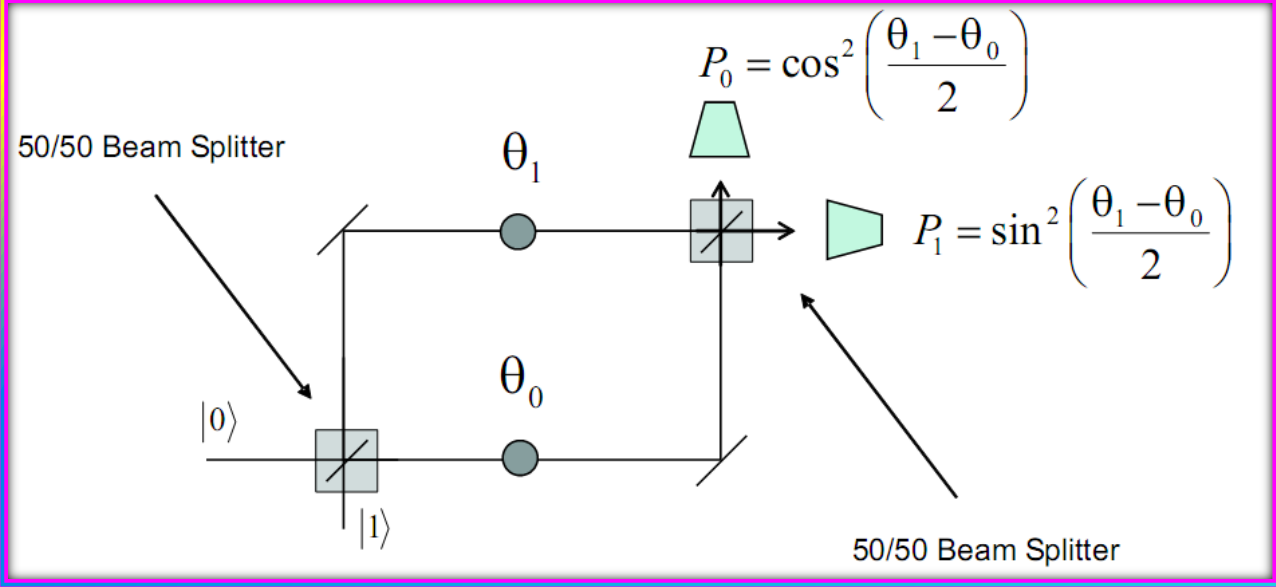
جدول صحت مدار

$$U \doteq \begin{pmatrix} \langle 00|U|00\rangle & \langle 00|U|01\rangle & \langle 00|U|10\rangle & \langle 00|U|11\rangle \\ \langle 01|U|00\rangle & \langle 01|U|01\rangle & \langle 01|U|10\rangle & \langle 01|U|11\rangle \\ \langle 10|U|00\rangle & \langle 10|U|01\rangle & \langle 10|U|10\rangle & \langle 10|U|11\rangle \\ \langle 11|U|00\rangle & \langle 11|U|01\rangle & \langle 11|U|10\rangle & \langle 11|U|11\rangle \end{pmatrix}$$

$$|control, target\rangle$$

$$C - NOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

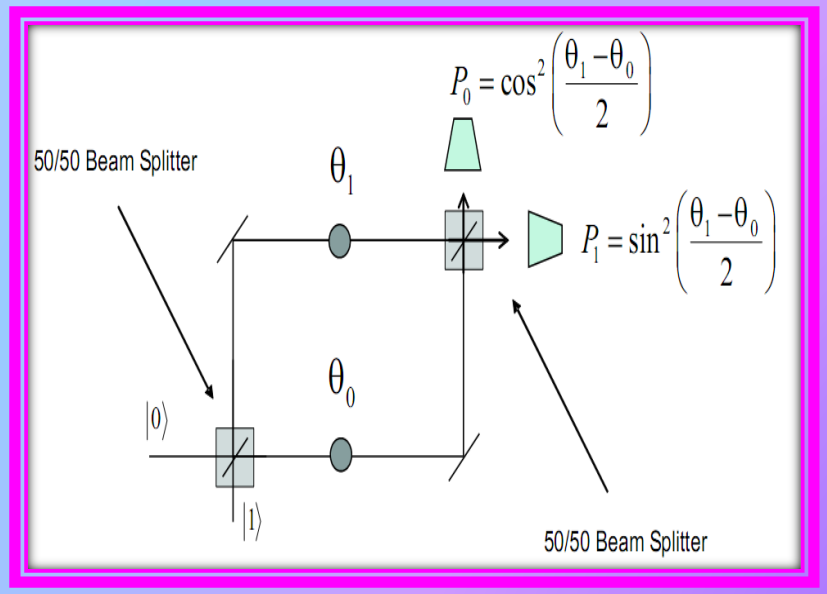
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \rightarrow^{C_{NOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$



تداخل سنج Mach-Zender

$$p_1 = \sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right)$$

$$p_0 = \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right)$$



$$|0\rangle$$

BS

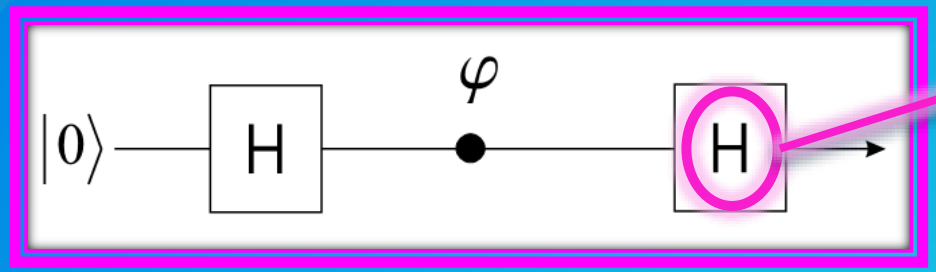
$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

θ

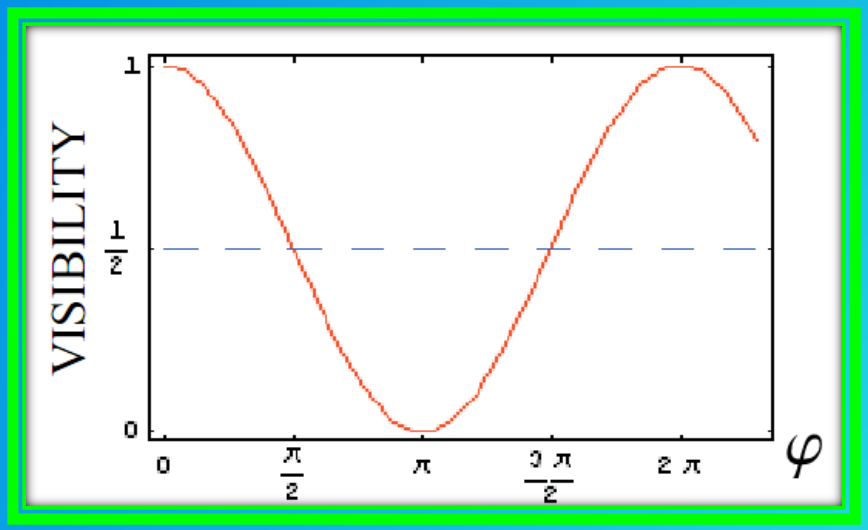
$$\frac{|0\rangle + e^{i(\theta_1-\theta_0)}|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

BS

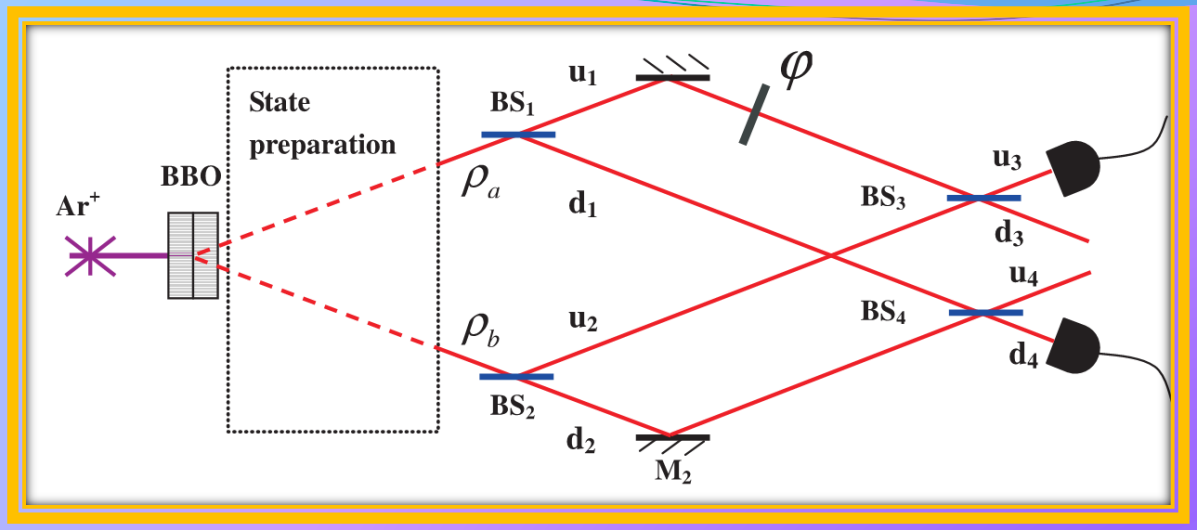
$$\frac{(1 + e^{i(\theta_1-\theta_0)})|0\rangle + (1 - e^{i(\theta_1-\theta_0)})|1\rangle}{2}$$



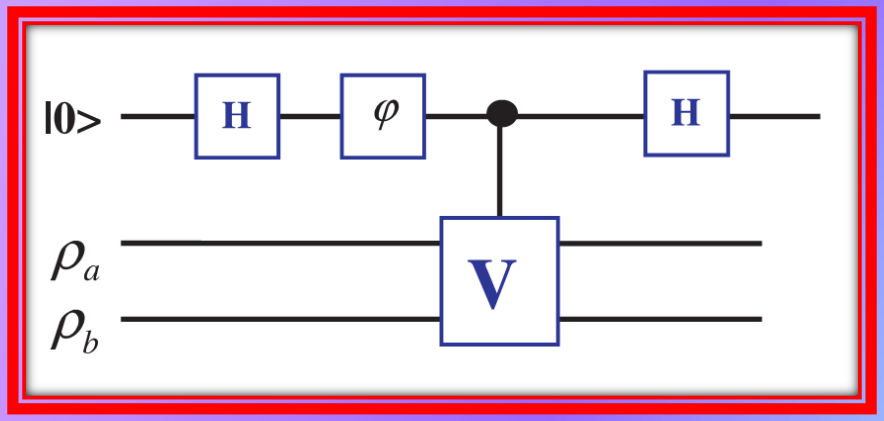
گیت
Hadamard

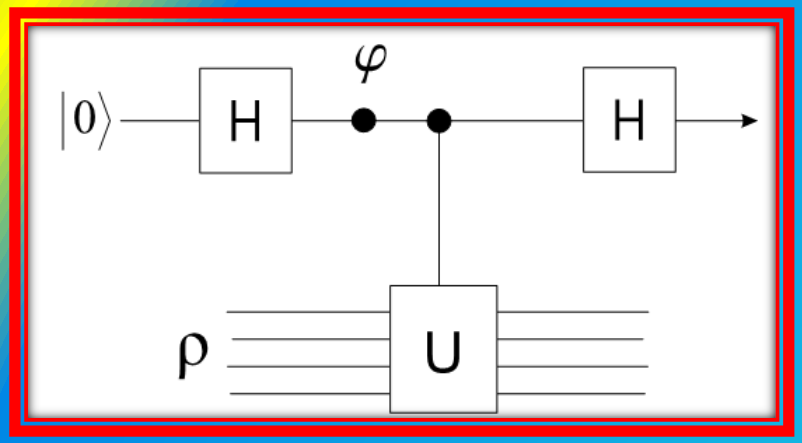


$$p_0 = \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{2}\right)$$



تداخل سنج Mach-Zender بهبود یافته





$$|0\rangle|\psi\rangle$$

H

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)|\psi\rangle$$

c-U

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + |1\rangle U(|\psi\rangle))$$

θ

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|\psi\rangle + e^{i\phi}|1\rangle U(|\psi\rangle))$$

H

$$\frac{1}{2}\left[|0\rangle\left(|\psi\rangle + e^{i\phi}U(|\psi\rangle)\right) + |1\rangle\left(|\psi\rangle - e^{i\phi}U(|\psi\rangle)\right)\right]$$

نتیجه گیری:

۱. دو سیستم می توانند تفکیک پذیر یا در هم تنیده باشند.

۲. یکی از روش های قدرتمند برای محاسبه تجربی درهم تنیدگی، روش شاهد تنیدگی می باشد.

۳. کاربرد در هم تنیدگی در گیت ها و تداخل سنج ها و ...

۴. برتری روش شاهد درهم تنیدگی به روش نابرابری بل

با سپاس
فراوان